

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

Soit (G, \times) un groupe, F_1 et F_2 deux sous-groupes de G .

On suppose que $F = F_1 \cup F_2$ est aussi un sous-groupe de G . Démontrer que

$$F_1 \subset F_2 \text{ ou } F_2 \subset F_1.$$

Solution : Supposons $F_1 \not\subset F_2$. Cela se traduit par : $\exists x \in F_1 : x \notin F_2$. Maintenant, soit $y \in F_2$. On a $z = x \times y \in F_1 \cup F_2$. Supposons l'espace d'un instant que $z \in F_2$. On aurait alors $z \times y^{-1} \in F_2$ comme produit de deux éléments de F_2 . Donc on a $z \notin F_2$. Donc $z \in F_1$. Donc $x^{-1} \times z = y \in F_1$.

On a donc démontré que si $F_1 \not\subset F_2$, alors $F_2 \subset F_1$.

Références