Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

28 novembre 2022

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Les questions sont indépendantes. Soit j le nombre complexe $e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

1. *Déterminer le sous-groupe du groupe additif $\mathbb{C}$ engendré par i et j.*
2. *Déterminer le sous-groupe du groupe multiplicatif $\mathbb{C}^*$ engendré par i et j.*

Solution :

1. *C'est le groupe $\left\{ni + mj \mid (n,m) \in \mathbb{Z}^2\right\}$. En effet, si un sous-goupe de $(\mathbb{C},+)$ contient i, alors il contient tous les $ni = \underbrace{i + \ldots + i}_{n \text{ fois.}}$, $n \in \mathbb{N}$ ainsi que leurs opposés (symétriques pour $+$.) Il contient donc tous les ni, $n \in \mathbb{Z}$. De même, il contient les mj, $m \in \mathbb{Z}$. Il contient aussi toutes les sommes de ces éléments, c'est-à-dire tous les $\left\{ni + mj \mid (n,m) \in \mathbb{Z}^2\right\}$. Comme cet ensemble est lui-même un sous-groupe de $(\mathbb{C},+)$, c'est le plus petit sous-groupe de $(\mathbb{C},+)$ contenant i et j, à savoir le groupe engendré par i et j.*
2. *C'est le groupe $\mathbb{U}_{12}$ des racines douzièmes de l'unité. En effet, comme précédemment, c'est le groupe $G = \left\{i^n j^m \mid (n,m) \in \mathbb{Z}^2\right\}$. En posant $\zeta_{12} = e^{\frac{2i\pi}{12}}$, on a $i = \zeta_{12}^3$ et $j = \zeta_{12}^4$. Donc $\zeta_{12} = ji^{-1} \in G$. Donc $\mathbb{U}_{12}$, le sous-groupe engendré par ζ_{12} est inclus dans G. Inversement, comme $i \in \mathbb{U}_{12}$ et $j \in \mathbb{U}_{12}$, le sous-groupe engendré par i et j est inclus dans ζ_{12}.*

Références