Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and Christophe Antonini[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3]Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Soit un groupe $(G,.)$ non commutatif d'élément neutre e. On suppose qu'il existe deux éléments $(s,t) \in G^2$ vérifiant $s^2 = t^2 = e$. On note

$$\Gamma = \{(st)^n \ ; \ t.(st)^n \ ; \ (st)^n.s \ ; \ t.(st)^n.s \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Montrer que Γ est un sous-groupe du groupe G.

Solution : *Γ est non vide. Démontrons qu'il est stable. Il y a 16 cas à vérifier. Par exemple il s'agit de démontrer - par récurrence sur m - que $(st)^n.t(st)^m = (st)^{n-m}s$ pour $n < m$ et $t(st)^{m-n}$ pour $n \geqslant m$. On en déduit que $(st)^n.t(st)^m s = (st)^{n-m}s.s = (st)^{n-m}$ pour $n < m$ et $t(st)^{m-n}s$ pour $n \geqslant m$, puis que $t(st)^n.t(st)^m s = t(st)^{n-m}$ pour $n < m$ et $t.t(st)^{m-n}s = (st)^{m-n}s$ pour $n \geqslant m$.*
De même, $(st)^n s.(st)^m = t(st)^{n-m}$ pour $n < m$ et $(st)^{m-n}s$ pour $n \geqslant m$. On en déduit que $(st)^n s.(st)^m s = t(st)^{n-m}s$ pour $n < m$ et $(st)^{m-n}$ pour $n \geqslant m$, puis $t(st)^n s.(st)^m = (st)^{n-m}$ pour $n < m$ et $t(st)^{m-n}s$ pour $n \geqslant m$. Les autres cas sont rapidement vérifiés.
Pour les inverses, $(st)^n.s$ et $t.(st)^n$ sont leurs propres inverses. D'autre part $(st)^n \left(t.(st)^{n-1}.s\right)$ pour $n \geqslant 1$ montre que l'inverse de $(st)^n$ est $t.(st)^{n-1}.s$. On en déduit que l'inverse de $t.(st)^n.s$ est $(st)^{n+1}$. Γ est donc un sous-groupe du groupe G.

Références