Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and Christophe Antonini³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes

6 avril 2023

Exercice 0.1 ★★ Pas de titre

On considère un groupe commutatif $(G, \cdot)$. On dit qu'un sous-groupe H est distingué lorsque $\forall g \in G, \forall h \in H, g.h.g^{-1} \in H$. Soient deux sous-groupes G_1 et G_2 distingués de G . Montrer que l'ensemble $G_1G_2 = \{g_1.g_2 \mid (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2\}$ est un sous-groupe distingué.

Solution : Soit $g \in G, h \in G_1G_2$. $\exists (g_1, g_2) \in G_1 \times G_2, h = g_1g_2$ donc $g.h.g^{-1} = g.g_1g_2.g^{-1} = (g.g_1g^{-1})(g.g_2.g^{-1})$. Or G_1 est distingués dans G , donc $g'_1 = g.g_1g^{-1} \in G_1$. De même, comme G_2 est distingués dans G , donc $g'_2 = g.g_2g^{-1} \in G_2$. Donc $g.h.g^{-1} = g'_1g'_2 \in G_1G_2$, ce qu'il fallait vérifier.

Références