Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and Christophe Antonini[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3]Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit $(E, *)$ *et* $e \in E$ *tels que :*
(i) $\forall (x, y, z, t) \in E^4, (xy)(zt) = (xz)(ty)$
(ii) $\forall x \in E$, $ex = x$
(iii) $\forall x \in E$, $\exists x' \in E : xx' = e$.
Montrer que $*$ *est commutative, associative, puis que* $(E, *)$ *est un groupe.*

Solution : *On prend* $x = z = e$. *D'après (i), on a* $(ey)(et) = (ee)(ty)$. *D'après (ii)* $ey = y$, $et = t$ *et* $ee = e$. *Donc* $yt = e(ty) = ty$. *La loi est donc commutative.*
On prend $z = e$. *D'après (i), on a* $(xy)(et) = (xe)(ty)$. *Or* $et = t$ *d'après (ii) et comme* $*$ *est commutative,* $xe = ex = x$. *Donc on a* $(xy)t = x(ty) = x(yt)$ *puisque* $*$ *est commutative. La loi est donc associative.*
D'après (ii), e *est élément neutre à gauche, donc à droite puisque* $*$ *est commutative. D'après (iii), tout élément admet un inverse à gauche, donc à droite puisque* $*$ *est commutative. On a bien démontré que* $(E, *)$ *est un groupe (abélien).*

Références