Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and Christophe Antonini[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3]Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit un ensemble E non-vide muni d'une loi de composition interne $\star$ associative telle que :

$$\forall (a,b) \in E^2, \quad \exists (x,y) \in E^2 : \quad b = a \star x = y \star a$$

Montrer que $(E, \star)$ est un groupe.

Indication 0.0 : Pour trouver un élément neutre, considérer $a = b = a_1$, ce qui donne l'existence de $(e,f) \in E^2$ vérifiant la propriété de l'énoncé. Considérer ensuite $b \in E$, et montrer que $b \star e = b$, $f \star b = b$. Montrer ensuite que $e = f$.

Solution :

1. *On sait déjà que la loi de composition interne est associative ;*
2. *Élément neutre : Soit un élément $a_1 \in E$. En prenant $b = a_1$, on sait qu'il existe $(e,f) \in E^2$ tels que $a_1 = a_1 \star e = f \star a_1$. Montrons que e est neutre. Soit $b \in E$. Il existe $(x,y) \in E^2$ tel que $b = a_1 \star x = y \star a_1$. Alors*

$$b \star e = (y \star a_1) \star e = y \star (a_1 \star e) = y \star a_1 = b$$

$$f \star b = f \star (a_1 \star x) = (f \star a_1) \star x = a_1 \star x = b$$

   On a donc montré que $\forall b \in E$, $b \star e = b$ et $f \star b = b$. En particulier, si $b = f$, $f \star e = f$ et si $b = e$, $f \star e = e$. On en déduit que $e = f$ et donc que $\forall x \in E$, $e \star x = x \star e = x$: e est l'élément neutre pour $\star$.
3. *Soit un élément $X \in E$. Montrons que cet élément admet un symétrique : En prenant $b = e$ et $a = X$, il existe $(x,y) \in E^2$ tels que $e = X \star x = y \star X$. Il suffit de montrer que $x = y$. Écrivons*

$$y = y \star e = y \star (X \star x) = (y \star X) \star x = e \star x = x$$

   Donc $x = y$ est le symétrique de X.

Références