

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and Christophe Antonini³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Soit $(G, \cdot)$ un groupe et E un ensemble. Soit $f : E \mapsto G$ une bijection. On définit sur E la loi de composition interne suivante :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad x \star y = f^{-1}(f(x) \cdot f(y))$$

Montrer que $(E, \star)$ est un groupe, puis que f est un isomorphisme de groupes.

Solution : La loi $\star$ est interne. Elle est associative : $(x \star y) \star z = f^{-1}(f(x) \cdot f(y)) \star z = f^{-1}(f(f^{-1}(f(x) \cdot f(y))) \cdot f(z)) = f^{-1}((f(x) \cdot f(y)) \cdot f(z)) = f^{-1}(f(x) \cdot (f(y) \cdot f(z))) = \dots = x \star (y \star z)$. Si on appelle e l'élément neutre de $(G, \cdot)$, $\varepsilon = f^{-1}(e)$ est élément neutre de E . Soit $x \in E$, on pose $y = f^{-1}(f(x)^{-1})$. On a $f(y) = f(x)^{-1}$ donc $f(x) \cdot f(y) = f(y) \cdot f(x) = e$ et donc $x \star y = f^{-1}(f(x) \cdot f(y)) = f^{-1}(e) = \varepsilon$ et de même $f(y) \cdot f(x) = \varepsilon$. Donc y est l'inverse de x pour $\star$.

Par ailleurs, $f(x \star y) = f(f^{-1}(f(x) \cdot f(y))) = f(x) \cdot f(y)$. C'est bien dire que f est un morphisme de groupes. Comme f est une bijection, c'est un isomorphisme.

Cet exercice a déjà été vu dans des cas particuliers. Voir les exercices ??, ?? et ??, pp. ??, ?? et ?? pour $f(x) = e^x$, $x + 1$ et $\text{th}(x)$.

Références