Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and Christophe Antonini[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3]Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes

23 février 2024

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soit $(G, .)$ un groupe commutatif d'élément neutre e. On pose

$$B = \{a \in G \mid \exists n \in \mathbb{N}^\star, a^n = e\}$$

Montrer que B est un sous-groupe de G.

Solution :

- *$e \in B$: posons $n = 1$, on a bien $e^n = e$.*
- *Soit $(x, y) \in B^2$. Montrons que $xy \in B$. Comme $x \in B$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $x^{n_1} = e$. De même, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $y^{n_2} = e$. Posons $n = n_1 n_2$. Alors*

  $$(xy)^n = (x^{n_1})^{n_2}(y^{n_2})^{n_1} = e.e = e$$

  (car $xy = yx$). Donc $xy \in B$.
- *Soit $x \in B$. Vérifions que $x^{-1} \in B$. Comme $x \in B$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = e$. Alors on vérifie que $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1} = e^{-1} = e$. Donc $x^{-1} \in B$.*

Références