

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and Christophe Antonini³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes

31 janvier 2023

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Soit (G, \cdot) un groupe commutatif d'élément neutre e . On pose

$$B = \{a \in G \mid \exists n \in \mathbb{N}^*, a^n = e\}$$

Montrer que B est un sous-groupe de G .

Solution :

— $e \in B$: posons $n = 1$, on a bien $e^n = e$.

— Soit $(x, y) \in B^2$. Montrons que $xy \in B$. Comme $x \in B$, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $x^{n_1} = e$. De même, il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $y^{n_2} = e$. Posons $n = n_1 n_2$. Alors

$$(xy)^n = (x^{n_1})^{n_2} (y^{n_2})^{n_1} = e \cdot e = e$$

(car $xy = yx$). Donc $xy \in B$.

— Soit $x \in B$. Vérifions que $x^{-1} \in B$. Comme $x \in B$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = e$. Alors on vérifie que $(x^{-1})^n = (x^n)^{-1} = e^{-1} = e$. Donc $x^{-1} \in B$.

Références