Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and Christophe Antonini[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3]Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Montrer qu'un groupe $(G, .)$ *tel que* $\forall x \in G$, $x^2 = e$ *est commutatif.*

Solution : *L'hypothèse de l'énoncé dit que tout élément est son propre symétrique :*

$$\forall x \in G, \quad x^{-1} = x.$$

Soit alors $(x, y) \in G^2$. *Comme* $(xy)^{-1} = (xy)$, *on en déduit que* $y^{-1}x^{-1} = xy$. *Mais puisque* $x^{-1} = x$ *et* $y^{-1} = y$, *on trouve que* $yx = xy$.
Autre rédaction : Soit $(x, y) \in G^2$. *Puisque* $(xy)^2 = e$, *il vient que*

$$xyxy = e \Rightarrow x(xyxy)y = xy \Rightarrow (x^2)(yx)(y^2) = xy \Rightarrow yx = xy.$$

Références