

Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and Christophe Antonini³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Soient $(G, \star)$ et $(H, \triangle)$ deux groupes. On définit sur $G \times H$ la loi $\heartsuit$ par $(x, y)\heartsuit(x', y') = (x \star x', y \triangle y')$.

1. Montrer que $(G \times H, \heartsuit)$ est un groupe.
2. Si G est de cardinal 2, dresser la table de $G \times G$ et la reconnaître parmi les exemples des exercices précédents.

Solution :

1. C'est un groupe produit, c'est du cours ! Voir proposition ?? p. ??.
- 2.

Soit $G = \{1, -1\}$ le groupe à deux éléments (pour la multiplication). On pose $e = (1, 1)$; $a = (1, -1)$; $b = (-1, 1)$; $c = (-1, -1)$. L'élément neutre pour $\heartsuit$ est e puisqu'il est composé deux fois de l'élément neutre de $(G, \times)$. On a $x^2 = e$ pour tout x , ce qui remplit la diagonale. La deuxième ligne (celle de e) est identique à la première (celle de $\heartsuit$) puisque e est l'élément neutre. Il s'agit du groupe de l'exercice ???. On a $ab = c$, puis $ac = a(ab) = (aa)b = b$ et enfin $bc = (ac)c = a$. On complète par symétrie puisque la loi $\heartsuit$ est commutative. Ces deux groupes sont isomorphes.

$\heartsuit$	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Références