

Groupe de Klein

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and Christophe Antonini³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★ Groupe de Klein

Soient les quatre fonctions de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R}^*

$$f_1(x) = x \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \quad f_3(x) = -x \quad f_4(x) = -\frac{1}{x}$$

Montrer que $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ est un groupe pour la loi \circ .

Solution : Il suffit de démontrer que G est un sous-groupe du groupe des bijections de \mathbb{R}^* dans \mathbb{R}^* . $f_2 \circ f_2 = f_1$; $f_2 \circ f_3 = f_4$; $f_2 \circ f_4 = f_3$; $f_3 \circ f_3 = f_1$; $f_3 \circ f_4 = f_2$. On a donc la stabilité, et tous les éléments sont leur propre inverse.

Références