Groupe des vitesses en relativité restreinte

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and Christophe Antonini[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3]Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Groupe des vitesses en relativité restreinte***

Soit $G =]-1,1[$. *On définit sur* G *une loi* $\star$ *par*

$$\forall (x,y) \in G^2, \quad x \star y = \tfrac{x+y}{1+xy}.$$

Montrer que $(G,\star)$ *est un groupe abélien.*

Solution : *On a* $\operatorname{th}(u+v) = \dfrac{\operatorname{th} u + \operatorname{th} v}{1 + \operatorname{th} u \operatorname{th} v}$. *Donc on pose* $x = \operatorname{th} u$, $y = \operatorname{th} v$, *et on a* $x \star y = \operatorname{th}(u+v) = \operatorname{th}(\operatorname{argth} x + \operatorname{argth} y)$.
On en déduit :

- *la loi* $\star$ *est interne, puisqu'une tangente hyperbolique appartient à* $]-1,1[$.
- $(x \star y) \star z = \operatorname{th}(\operatorname{argth} x + \operatorname{argth} y + \operatorname{argth} z) = x \star (y \star z)$.
- 0 *est élément neutre.*
- *L'opposé de* x *est aussi son inverse pour* $\star$.

Références