Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

1. *Soit $x \in [-1,1]$. Simplifier :*
   (a) $\cos(\arcsin x)$
   (b) $\sin(\arccos x)$.

2. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Simplifier :*
   (a) $\cos(3 \arctan x)$
   (b) $\cos^2(\frac{1}{2}\arctan x)$.

Solution :

1. *Soit $x \in [-1,1]$.*
   (a) $\arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *donc* $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)} = \boxed{\sqrt{1-x^2}}$
   (b) $\arccos x \in [0,\pi]$ *donc* $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-\cos^2(\arccos x)} = \boxed{\sqrt{1-x^2}}$.

2. *Soit $x \in \mathbb{R}$. Remarquons que, pour tout $X \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, comme $1+\tan^2 X = 1/\cos^2 X$, il vient $\cos X = 1/\sqrt{1+\tan^2 X}$ et donc $\cos\arctan x = 1/(\sqrt{1+x^2})$ car $\arctan x \in \left]-\pi/2,\pi/2\right[$.*
   (a) *On utilise les techniques de l'annexe **??**, il vient $\cos(3X) = 4\cos^3 X - 3\cos X$ et donc :*

$$\begin{aligned}\cos(3\arctan x) &= 4\cos^3 \arctan x - 3\cos\arctan x \\ &= \frac{4}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{3}{(1+x^2)^{1/2}} \\ &= \boxed{\frac{1-3x^2}{(1+x^2)^{3/2}}}\end{aligned}$$

   (b) *Comme $\cos^2 X = 1/2(\cos(2x)+1)$:*

$$\begin{aligned}\cos^2\left(\frac{1}{2}\arctan x\right) &= \frac{1}{2}(\cos\arctan x + 1) \\ &= \boxed{\frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{2}}\end{aligned}$$

Références