Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and Christophe Antonini[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3]Enseignant en CPGE, Institut Stanislas, Cannes

2 février 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Soient $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ et $\star$ la loi de composition interne définie sur G par

$$(x, y) \star (x', y') = (xx', xy' + y)$$

1. *Montrer que $(G, \star)$ est un groupe.*
2. *Montrer que $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un sous-groupe de $(G, \star)$.*

Solution :

1. — *C'est une loi interne : le produit de deux réels non nuls est non nul.*
   — *Pour tout $(x, y), (x', y'), px'', y'' \in G$, $((x, y) \star (x', y')) \star (x'', y'') = (xx', xy' + y) \star (x'', y'') = (xx'x'', xx'y'' + xy' + y) =$ et $(x, y) \star ((x', y') \star (x'', y'')) = (x, y) \star (x'x'', x'y'' + y') = (xx'x'', x(x'y'' + y') + y) = (xx'x'', xx'y + xy' + y)$. Donc $\star$ est associative.*
   — *La loi $\star$ n'est pas commutative : $(2, 0) \star (1, 1) = (2, 2)$ et $(1, 1) \star (2, 0) = (2, 1)$.*
   — *Le couple $(1, 0)$ est élément neutre pour $\star$: $(1, 0) \star (x, y) = (x, y) \star (1, 0) = (x, y)$.*
   — *Soit $(x, y) \in G$. On pose $(x', y') = \left(\frac{1}{x}, -\frac{y}{x}\right)$. On vérifie que $(x, y) \star (x', y') = (1, 0)$ et $(x', y') \star (x, y) = (1, 0)$. Donc tout élément $(x, y) \in G$ admet un inverse pour $\star$: (x', y').*
2. *La stabilité est assurée par le fait que le produit de deux nombres positifs est positif.*

Remarque 0.1 *Les vérifications sont très rapides si on considère les matrices $\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ qui forment un sous-groupe du groupe des matrices 2×2 inversibles. Encore faut-il le voir...et connaître les matrices ce qui ne va pas tarder...*

Références