Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

*Soit $(E,*)$ un ensemble fini muni d'une loi interne * associative.*
Démontrer qu'il existe un élément x de E tel que $x*x=x$.

Solution : *On propose deux solutions*

1. *Soit $y \in E$. On considère $y_n = y^{2^n}$. Tous les y_n appartiennent à l'ensemble fini E. D'après le principe des tiroirs (proposition* **??** *p.* **??***), il existe deux entiers $n>p$ tels que $y_n = y_p$. En posant $z=y_p$ on a $z^{2^{n-p}} = z$. En multipliant par z^k on obtient $z^{2^{n-p}+k} = z^{k+1}$. L'entier k convenable est obtenu en résolvant $2^{n-p}+k = 2(k+1)$ soit $k = 2^{n-p}-2 \geqslant 0$. On pose $x = z^{k+1} = z^{2^{n-p}-1}$. On a bien $x^2 = x$. Où l'hypothèse d'associativité intervient-elle ? On en a besoin pour définir z^k. Par exemple $z^3 = z(zz) = (zz)z$.*
2. *On considère $F \subset E$ non vide, stable pour $*$ et qui a le plus petit nombre d'éléments parmi les parties non vides et stables pour $*$. On va démontrer que pour tout élément x de F on a $x*x=x$, et par suite que F est réduit à $\{x\}$.*

   Soit $x \in F$ et soit $F_x = \{y \in F \mid \exists y' \in F, y = x*y'\}$. F_x est stable par $*$. En effet, soit $(y,z) \in F_x^2$. $\exists (y',z') \in F^2, y*z = x*y'*x*z'$. Or $y'*x*z' \in F$ puisque F est stable par $*$. Donc on a bien $y*z \in F_x$.

   De plus, $F_x \neq \varnothing$ puisque $x*x \in F_x$. $F_x \subset F$ et F_x est stable par $*$. Donc $F_x = F$ puisque F a le plus petit nombre d"éléments. On en déduit que $x \in F_x$.

   Maintenant l'ensemble G_x des y tel que $x*y=x$ est non vide d'après ce qui vient d'être démontré et est stable par $*$. En effet, soit $(y,z) \in F_x^2$, $x*(y*z) = (x*y)*z = x*z = x$. Donc $G_x = F$, $x \in G_x$ et $x*x=x$.

Références