Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ Pas de titre

Sur l'ensemble $\mathbb{Z}$, étudier les propriétés de la loi définie par :

$$p \star q = p + q + pq$$

1. Montrer que $\star$ est une loi de composition interne commutative et associative.
2. Montrer que $\star$ possède un élément neutre.
3. Quels sont les éléments symétrisables ? réguliers ?
4. Est-ce que $(\mathbb{Z}, \star)$ est un groupe ?
5. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ muni de la loi $\star$ définie par $\forall a, b \in \mathbb{R}, a \star b = a + b + ab$ est-il un groupe ?

Solution :

1. La loi $\star$ est clairement commutative. Soient $(p, q, r) \in \mathbb{Z}^3$. Calculons

$$(p \star q) \star r = (p + q + pq) \star r = p + q + pq + r + pr + qr + pqr$$

et

$$p \star (q \star r) = p \star (q + r + qr) = p + q + r + qr + pq + pr + pqr.$$

La loi est donc associative.

2. Cherchons un élément neutre. On cherche un élément $e \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall p \in \mathbb{Z}$,

$$p \star e = e \star p = p \iff e(1 + p) = 0$$

On trouve donc un élément neutre : $e = 0$.

3. Soit un entier $p \in \mathbb{Z}$. Est-ce que l'élément p possède un symétrique ? On cherche un élément $q \in \mathbb{Z}$ tel que $p \star q = q \star p = 0$, c'est-à-dire :

$$p + q + pq = 0 \iff q(1 + p) = -p \iff (1 + p)(1 + q) = 1$$

Les seuls éléments inversibles sont 0 et -2 qui sont leurs propres inverses.

On suppose $p \star q = p \star r$ soit $(1 + p)(1 + q) = (1 + p)(1 + r)$. On voit ainsi que tous les éléments sont réguliers, sauf $p = -1$.

4. $(\mathbb{Z}, \star)$ n'est donc pas un groupe.

5. La stabilité vient de $1 + a \star b = (1 + a)(1 + b) \neq 0$. L'associativité se vérifie comme plus haut, $e = 0$ est élément neutre, et $1 + b = \frac{1}{1 + a}$ fournit un inverse à a soit $b = \frac{1}{1 + a} - 1 = -\frac{a}{1 + a}$. Bref, $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \star)$ est un groupe.

Références