Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

On définit une loi de composition interne $\star$ *sur* $\mathbb{R}$ *par :* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad a \star b = \ln\left(e^a + e^b\right)$. *Quelles en sont les propriétés ? Possède-t-elle un élément neutre ? Y a-t-il des éléments réguliers ? (On dit qu'un élément* a *est régulier si pour tout* $(b,c) \in \mathbb{R}$, $a \star b = a \star c \Rightarrow b = c$.

Solution : *On a bien une loi de composition interne : en effet* $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2, \quad e^a + e^b > 0$ *donc* $a \star b$ *est bien défini. On a facilement* $(a \star b) \star c = \ln\left(\left(e^a + e^b\right) + e^c\right)$ *et* $a \star (b \star c) = \ln\left(e^a + \left(e^b + e^c\right)\right)$ *et donc* $\star$ *est associative. Elle est aussi clairement commutative. Elle ne peut pas avoir d'élément neutre car* $a \star b > b$. *Tous les éléments sont réguliers car si* $a \star b = a \star c$ *alors* $\ln\left(e^a + e^b\right) = \ln\left(e^a + e^c\right)$ *donc* $e^a + e^b = e^a + e^c$ *donc* $e^b = e^c$ *donc* $b = c$.

Références