Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★★ ***Pas de titre***

Au cours d'un congrès de mathématiques, des mathématiciens (en nombre n) sont logés dans les n chambres d'un hôtel. Ils décident (dans des circonstances qui restent a déterminer), de s'attribuer le numéro de leur chambre. Avant que la horde ne se mette à envahir l'hôtel toutes leurs chambres sont fermées. Le mathématicien numéro k doit changer l'état (ouvert/fermé) des chambres qui portent un numéro multiple du sien.

1. *Quel est le nombre de portes qui seront ouvertes après le passage des mathématiciens ?*
2. *Démontrer que $\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \dfrac{n}{k} \right\rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ est un entier pair (On rappelle que $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x).*

Solution :

1. *Plaçons nous du point de vue d'une porte. Elle sera ouverte après le passage des mathématiciens si son état (ouvert/fermé) a été modifié par un nombre impair de mathématiciens (et fermée sinon). Autrement dit elle sera ouverte* in fine *si son numéro m admet un nombre impair de diviseurs (positifs). On décompose m en facteurs premiers : $m = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(m)}$. Les diviseurs d de m s'écrivent donc $d = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\nu_p(d)}$ avec $\forall\, p \in \mathbb{P},\ \nu_p(d) \leqslant \nu_p(m)$. Pour chaque choix de nombre premier p divisant m on a $\nu_p(m) + 1$ puissances de p qui divisent m, à savoir $1, p, p^2, \dots, p^{\nu_p(m)}$ il y a donc un total de $\prod_{p \in \mathbb{P}} (\nu_p(m) + 1)$ diviseurs de m. Maintenant un produit de facteurs est impair si et seulement si chacun des facteurs est impairs, donc dans notre cas on doit avoir tous les $\nu_p(m) + 1$ impairs c'est-à-dire tous les $\nu_p(m)$ pairs ce qui signifie que m est un carré parfait.*
   Une autre façon de voir : Si d est un diviseur de m alors $\frac{m}{d}$ est aussi un diviseur de m. On peut ainsi regrouper les diviseurs de m deux par deux, sauf si, par extraordinaire, m et $\frac{m}{d}$ sont égaux, c'est-à-dire lorsque $m = d^2$ donc lorsque m est un carré parfait.
   Notre problème devient donc : Combien y a-t-il de carrés parfaits entre 1 et n ? Il y en a $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$.

2. *Plaçons nous du point de vue du mathématicien numéro k. Il change l'état (ouvert/fermé) des portes $k, 2k, \dots$. De combien de portes change-t-il l'état ? En n combien de fois k ? Il*

va $\left\lfloor \dfrac{n}{k} \right\rfloor$. *Il y a donc eu au total* $\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \dfrac{n}{k} \right\rfloor$ *changement d'état. Si on enlève les* $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ *portes exceptionnelles, toutes les portes ont changé un nombre pair de fois. C'est bien dire que* $\sum_{k=1}^{n} \left\lfloor \dfrac{n}{k} \right\rfloor - \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ *est un entier pair.*

Références