Formule de Machin

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **Formule de Machin**

1. *Montrer que* $\frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$.
2. *Pour tout* $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\mathbb{Z}\right)$, *exprimer* $\tan(4x)$ *en fonction de* $\tan x$.
3. *En déduire la formule de Machin :*

$$\frac{\pi}{4} = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$$

Solution :

1. *Notons* $\alpha = \arctan \frac{1}{2} + \arctan \frac{1}{3}$. *En utilisant les formules d'additions pour la tangente :*

$$\tan(\alpha) = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 1.$$

De plus $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$, *donc nécessairement* $\alpha = \frac{\pi}{4}$.

2. *Soit* $x \in \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\mathbb{Z}\right)$. *Toujours par application des formules d'additions, on montre que :*

$$\tan(4x) = \frac{4\,\tan(x) - 4\,(\tan(x))^3}{1 - 6\,(\tan(x))^2 + (\tan(x))^4}$$

3. *Par application de cette dernière formule, on trouve que :* $\tan\left(4 \arctan \frac{1}{5}\right) = \frac{120}{119}$. *Donc, une fois encore grâce aux formules d'additions, si on note* $\beta = 4 \arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239}$, *on trouve :*

$$\tan \beta = \frac{\tan\left(4 \arctan \frac{1}{5}\right) - \tan\left(\arctan \frac{1}{239}\right)}{1 + \tan\left(4 \arctan \frac{1}{5}\right) \tan\left(\arctan \frac{1}{239}\right)} = \frac{\frac{120}{119} - \frac{1}{239}}{1 + \frac{120}{119} \times \frac{1}{239}} = 1$$

et donc comme dans la première question, on montre que $\beta = \frac{\pi}{4}$, *ce qui démontre la formule de Machin.*

Références