Suite de Fibonacci

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

29 mars 2024

Exercice 0.1 ★★ Suite de Fibonacci

On considère la suite de Fibonacci définie par

$$u_0 = 0, u_1 = 1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1. Montrer que $\forall n \geq 1, u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$.
2. Montrer que deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux.
3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \in \mathbb{N}^*, u_{n+p} = u_n u_{p-1} + u_{n+1} u_p$$

et en déduire que

$$u_n \wedge u_p = u_{n \wedge p}.$$

4. Montrer que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, u_n \wedge u_m = u_{n \wedge m}.$$

5. Montrer que pour tout entier $n \geq 5$, si u_n est un nombre premier, alors n est un nombre premier. La réciproque est-elle vraie ?

Références