

Suite de Fibonacci

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ Suite de Fibonacci

On considère la suite de Fibonacci définie par

$$u_0 = 0, u_1 = 1, \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

1. Montrer que $\forall n \geq 1, u_{n+1}u_{n-1} - u_n^2 = (-1)^n$.
2. Montrer que deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci sont premiers entre eux.
3. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall p \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+p} = u_n u_{p-1} + u_{n+1} u_p$$

et en déduire que

$$u_n \wedge u_p = u_n \wedge u_{n+p}.$$

4. Montrer que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, \quad u_n \wedge u_m = u_{n \wedge m}.$$

5. Montrer que pour tout entier $n \geq 5$, si u_n est un nombre premier, alors n est un nombre premier. La réciproque est-elle vraie ?

Solution :

1. Par récurrence, en écrivant

$$u_{n+2}u_n - u_{n+1}^2 = (u_{n+1} + u_n)u_n - u_{n+1}^2 = u_{n+1}(\underbrace{u_n - u_{n+1}}_{=-u_{n-1}}) + u_n^2 = (-1)^{n+1}.$$

2. L'identité précédente fournit une identité de Bézout entre u_n et u_{n+1} .
3. Par récurrence sur p , en écrivant $u_{n+p+1} = u_{n+1+p}$ et en remarquant que

$$\begin{aligned} u_{n+p+1} &= u_{n+1}u_{p-1} + u_{n+2}u_p \\ &= u_{n+1}u_{p-1} + (u_{n+1} + u_n)u_p \\ &= u_{n+1}(u_{p-1} + u_p) + u_n u_p \\ &= u_{n+1}u_{p+1} + u_n u_p. \end{aligned}$$

De la relation précédente, tout entier qui divise u_n et u_p divise u_{n+p} et tout entier qui divise u_n et u_{n+p} divise le produit $u_{n+1}u_p$, mais comme il est premier avec u_{n+1} , il divise u_p . Donc

$$u_n \wedge u_p = u_n \wedge u_{n+p}.$$

4. Appliquer le résultat précédent en faisant tourner l'algorithme d'Euclide.
5. Soit n un entier supérieur à 5, tel que u_n soit premier. Si n n'était pas premier, on aurait un diviseur propre $d \geq 3$. Mais alors u_n serait divisible par u_d avec $2 \leq u_d < u_n$, ce qui est impossible. La réciproque est fautive avec $n = 19$, et $u_{19} = 5181 = 37 \times 113$.

Références