Nombres de Fermat

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Nombres de Fermat***

On appelle nombres de Fermat, *les entiers de la forme*

$$F_n = 2^{2^n} + 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. *Montrer que pour tout entier $x \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$, l'entier $x^{2^p} - 1$ est divisible par $x + 1$.*
2. *Montrer que deux nombres de Fermat distincts sont premiers entre eux.*

Solution :

1. *On a $1 - \left(x^2\right)^p = \left(1 - x^2\right) \sum_{k=0}^{p-1} \left(x^2\right)^k$ de quoi découle le résultat.*
2. *Soient deux entiers $n < m$. Posons $p = m - n$ et écrivons*

$$F_m - 2 = 2^{2^m} - 1 = 2^{2^{n+p}} - 1 = 2^{2^n 2^p} - 1 = \left(2^{2^n}\right)^{2^p} - 1$$

Mais pour tout entier x, l'entier $x^{2^p} - 1$ est divisible par $x + 1$. Il existe donc un entier $q \in \mathbb{N}$ tel que

$$F_m - 2 = (2^{2^n} + 1)q$$

c'est-à-dire

$$F_m - F_n q = 2.$$

Il en résulte que $F_m \wedge F_n$ est un diviseur de 2. Mais puisque les nombres de Fermat sont impairs, le seul diviseur possible est 1.

Références