Équation de Pythagore

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

13 mai 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Équation de Pythagore***

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble E *des triplets* $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ *vérifiant l'équation de Pythagore :*

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

1. *Montrer que pour tout couple* $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$*, le triplet* $(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$ *appartient à l'ensemble* E*. Donner* 3 *éléments distincts de l'ensemble* E*.*
2. *On considère un triplet* $(x, y, z) \in E$ *vérifiant* $x \wedge y = 1$*.*
   (a) *Montrer qu'alors* $x \wedge z = 1$ *et* $y \wedge z = 1$*.*
   (b) *Montrer que les entiers* x *et* y *ne sont pas de même parité.*
   (c) *On suppose par exemple que* x *est impair et que* y *est pair. Montrer qu'il existe deux entiers non nuls* $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ *premiers entre eux tels que*

   $$x = p - q, \ y = p + q, \ y^2 = 4pq$$

   Montrer de plus que p *et* q *sont des carrés parfaits.*
3. *En déduire l'ensemble* E*.*

Solution :

1. *Par un calcul simple.*
2. (a) *Supposons que* x *et* z *admettent un diviseur premier commun* p*. Comme* $p|x$ *et que* $p|z$*, on a* $p|x^2$ *et* $p|z^2$*. Mais alors* $p|y^2$ *ce qui amène* $p|y$ *et alors* $x \wedge y \neq 1$*. On montre de même que* $y \wedge z = 1$*.*
   (b) *Si* x *et* y *étaient pairs,* $2|x \wedge y$*, ce qui est impossible. Si on suppose* x *impair, et* y *impair, alors* $x^2 + y^2 \equiv 2\ [4]$*, ce qui est impossible car* $z^2 \equiv 0\ [4]$ *(regarder la décomposition de* z *en facteurs premiers, et la puissance de* 2*).*

(c) *Posons $p = (z+x)/2$ et $q = (z-x)/2$. Ce sont des entiers car z et x sont impairs. Ils sont positifs car $z > x$. Comme $x \wedge z = 1$, d'après Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $ux + vz = 1$, mais alors $(u+v)p + (v-u)q = 1$ ce qui montre que $p \wedge q = 1$. Alors $4pq = z^2 - x^2 = y^2$.*

Comme $p \wedge q = 1$, ils n'ont pas de facteurs premiers en commun dans leur décomposition. Comme $pq = y^2/4$ est un carré, tous les exposants dans la décomposition de p et q sont pairs, ce qui montre que p et q sont des carrés.

3. *Soit $(x, y, z) \in E$. si $x \wedge y \neq 1$, en posant $\delta = x \wedge y$, on a $\delta^2(x'^2 + y'^2) = z^2$ et donc δ^2/z^2, par conséquent, il existe $z' \in \mathbb{N}$ tel que $z^2 = \delta^2 z'^2$ (comme z^2 est un carré, z^2/δ^2 en est encore un comme on le voit en examinant la décomposition en facteurs premiers). Alors $x'^2 + y'^2 = z'^2$ avec $x' \wedge y' = 1$. D'après la question précédente, il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $(x, y, z) = \delta^2(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$. On a donc montré (avec la première question) que*

$$E = \{\delta^2(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2) \mid (a, b) \in \mathbb{N}^{*2},\ \delta \in \mathbb{N}\}$$

Références