

Équation de Pythagore

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

22 février 2024

Exercice 0.1 ★★ Équation de Pythagore

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble E des triplets $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ vérifiant l'équation de Pythagore :

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

1. Montrer que pour tout couple $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$, le triplet $(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$ appartient à l'ensemble E . Donner 3 éléments distincts de l'ensemble E .
2. On considère un triplet $(x, y, z) \in E$ vérifiant $x \wedge y = 1$.
 - (a) Montrer qu'alors $x \wedge z = 1$ et $y \wedge z = 1$.
 - (b) Montrer que les entiers x et y ne sont pas de même parité.
 - (c) On suppose par exemple que x est impair et que y est pair. Montrer qu'il existe deux entiers non nuls $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$ premiers entre eux tels que

$$x = p - q, \quad y = p + q, \quad y^2 = 4pq$$

Montrer de plus que p et q sont des carrés parfaits.

3. En déduire l'ensemble E .

Solution :

1. Par un calcul simple.
2. (a) Supposons que x et z admettent un diviseur premier commun p . Comme $p|x$ et que $p|z$, on a $p|x^2$ et $p|z^2$. Mais alors $p|y^2$ ce qui amène $p|y$ et alors $x \wedge y \neq 1$. On montre de même que $y \wedge z = 1$.
 - (b) Si x et y étaient pairs, $2|x \wedge y$, ce qui est impossible. Si on suppose x impair, et y impair, alors $x^2 + y^2 \equiv 2 \pmod{4}$, ce qui est impossible car $z^2 \equiv 0 \pmod{4}$ (regarder la décomposition de z en facteurs premiers, et la puissance de 2).

(c) Posons $p = (z + x)/2$ et $q = (z - x)/2$. Ce sont des entiers car z et x sont impairs. Ils sont positifs car $z > x$. Comme $x \wedge z = 1$, d'après Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $ux + vz = 1$, mais alors $(u + v)p + (v - u)q = 1$ ce qui montre que $p \wedge q = 1$. Alors $4pq = z^2 - x^2 = y^2$.

Comme $p \wedge q = 1$, ils n'ont pas de facteurs premiers en commun dans leur décomposition. Comme $pq = y^2/4$ est un carré, tous les exposants dans la décomposition de p et q sont pairs, ce qui montre que p et q sont des carrés.

3. Soit $(x, y, z) \in E$. si $x \wedge y \neq 1$, en posant $\delta = x \wedge y$, on a $\delta^2(x'^2 + y'^2) = z^2$ et donc δ^2/z^2 , par conséquent, il existe $z' \in \mathbb{N}$ tel que $z^2 = \delta^2 z'^2$ (comme z^2 est un carré, z^2/δ^2 en est encore un comme on le voit en examinant la décomposition en facteurs premiers). Alors $x'^2 + y'^2 = z'^2$ avec $x' \wedge y' = 1$. D'après la question précédente, il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^{*2}$ tels que $(x, y, z) = \delta^2(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$. On a donc montré (avec la première question) que

$$E = \{\delta^2(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2) \mid (a, b) \in \mathbb{N}^{*2}, \delta \in \mathbb{N}\}$$

Références