

# Équation de Pythagore

Emmanuel Vieillard-Baron<sup>1</sup>, Alain Soyeur<sup>2</sup>, and François Capaces<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

<sup>2</sup>Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

<sup>3</sup>, ,

8 juin 2023

## Exercice 0.1 ★★ Équation de Pythagore

Le but de cet exercice est de déterminer l'ensemble  $E$  des triplets  $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$  vérifiant l'équation de Pythagore :

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

1. Montrer que pour tout couple  $(a, b) \in (\mathbb{N}^*)^2$ , le triplet  $(a^2 - b^2, 2ab, a^2 + b^2)$  appartient à l'ensemble  $E$ . Donner 3 éléments distincts de l'ensemble  $E$ .
2. On considère un triplet  $(x, y, z) \in E$  vérifiant  $x \wedge y = 1$ .
  - (a) Montrer qu'alors  $x \wedge z = 1$  et  $y \wedge z = 1$ .
  - (b) Montrer que les entiers  $x$  et  $y$  ne sont pas de même parité.
  - (c) On suppose par exemple que  $x$  est impair et que  $y$  est pair. Montrer qu'il existe deux entiers non nuls  $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$  premiers entre eux tels que

$$x = p - q, \quad y = p + q, \quad y^2 = 4pq$$

Montrer de plus que  $p$  et  $q$  sont des carrés parfaits.

3. En déduire l'ensemble  $E$ .

## Références