Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soit un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe $(a_n,\ b_n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + \sqrt{2} b_n$. Montrer ensuite que les entiers a_n et b_n sont premiers entre eux.

Solution : *Par le binôme :*

$$(1+\sqrt{2})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \sqrt{2}^k = \sum_{p=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2p} 2^p + \sqrt{2} \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} \binom{n}{2p+1} 2^p$$

Il suffit de poser

$$a_n = \sum_{p=0}^{E(n/2)} \binom{n}{2p} 2^p \quad b_n = \sum_{p=0}^{E((n-1)/2)} \binom{2}{2p+1} 2^p$$

De la même façon, on montre l'existence de $(c_n, d_n) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $(\sqrt{2}-1)^n = c_n + \sqrt{d_n}$. En effectuant le produit,

$$1 = (\sqrt{2}-1)^n(\sqrt{2}+1)^n = a_n c_n + 2 b_n d_n + \sqrt{2}(b_n c_n + d_n a_n)$$

Mais puisque dans le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $\mathbb{R}$, le système $(1, \sqrt{2})$ est libre, il vient que $b_n c_n + a_n d_n = 0$ et donc on obtient une relation de Bézout entre les entiers a_n et b_n :

$$c_n a_n + 2 d_n b_n = 1$$

ce qui montre que les entiers a_n et b_n sont premiers entre eux.

Références