Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

31 janvier 2023

Exercice 0.1 ***Pas de titre***
Trouver le plus petit entier $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que le nombre $(\underbrace{1\dots1}_{n\times})_{10}$ soit divisible par 49.

Solution : *Le nombre s'écrit*

$$1 + 10 + \cdots + 10^{n-1} = \frac{10^n - 1}{9}$$

Supposons qu'il soit divisible par $49 = 7^2$. Il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $10^n = 1 + 3^2 \times 7^2 \times k$, et nécessairement, on doit avoir $10^n \equiv 1\ [7]$. En examinant les puissances de 10 dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, on voit qu'il est nécessaire que $n = 6p$. Alors $10^{6p} = (10^2)^{3p} = 2^{3p} = 8^p$ dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$. Mais en examinant les puissances de 8 dans $\mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$, on voit qu'il est nécessaire que $p = 7l$ et donc nécessairement, $n = 42j$. Réciproquement, si $n = 42j$, $10^n - 1$ est divisible par 7^2 et par 3^2, et donc par 9×49 puisque 7^2 et 3^2 sont premiers entre eux. Il vient donc que $(10^n - 1)/9$ est divisible par 49. Le plus petit entier n vaut donc 42.

Références