Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Paris
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient deux entiers non nuls $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ premiers entre eux. Montrez qu'il existe deux entiers $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que

$$au + bv = 1 \text{ et } |u| < |b|,\ |v| \leqslant |a|.$$

Solution : *Le résultat est faux dans le cas (sans intérêt) où a et b sont égaux à ± 1. Dans les autres cas, quitte à changer a et/ou b en leurs opposés, on peut toujours supposer a et b positifs. Il suffit pour cela de changer le/les signe/s de u ou v selon les cas.*

On écrit une relation de Bézout $au_0 + bv_0 = 1$. Reste à avoir $-b < u < b$ et $-a < v < a$ en posant $u = u_0 + kb$ et $v = v_0 - ka$ (voir l'exercice précédent). On a bien $au + bv = 1$. Pour avoir $|u| < b$, il suffit de prendre $-b < v < b$ soit $-1 - \dfrac{u_0}{b} < k < 1 - \dfrac{u_0}{b}$. On choisit k entier dans un intervalle ouvert de longueur 2. On a deux possibilités, sauf lorsque $\dfrac{u_0}{b}$ est entier (pour $b = \pm 1$), auquel cas on peut (et on doit) choisir $k = -\dfrac{u_0}{b}$ et donc $u = 0$ et par suite $bv = 1$ entraîne bien $v = \pm 1$ et donc $|v| \leqslant |a|$ puisque dans ce cas on n'a pas $|a| = 1$.
Lorsque $\dfrac{u_0}{b}$ n'est pas entier, on a donc deux possibilités pour (u_1, v_1) et $(u_1 + b, v_1 - b)$ qui vérifient $|u| < b$.
Comme $au + bv = 1$, on a $0 \leqslant au + bv = 1 < ab$. Donc $ab < -au \leqslant bv < ab - au < ab + ab$ et $-a < v < 2a$. Deux cas se présentent. Si $-a < u < a$, alors c'est gagné. Sinon c'est qu'on s'est trompé dans le choix de a_1 et on considère cette fois $v - a$ qui vérifie $0 \leqslant v - a < a$ et c'est encore gagné.

Références