Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

29 mars 2024

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Considérons deux entiers $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ *premiers entre eux* $a \wedge b = 1$ *et un couple de Bézout* $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ *tel que* $au_0 + bv_0 = 1$*. Déterminer l'ensemble de tous les couples de Bézout* $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ *vérifiant* $au + bv = 1$*.*

Solution : *Soit* (u, v) *un couple d'entiers vérifiant la relation* $au + bv = 1$*. Par soustraction on a* $a(u - u_0) = b(v_0 - v)$*. Donc* b *divise* $a(u - u_0)$*. Puisque* a *et* b *sont premiers entre eux, d'après le lemme de Gauss,* b *divise nécessairement* $u - u_0$*, donc il existe* $k \in \mathbb{Z}, u - u_0 = kb$ *ou* $u = u_0 + kb$*. En remplaçant* $u - u_0$ *par* kb*, on obtient alors* $akb = b(v_0 - v)$*, d'où* $v = v_0 - ka$*.*
Réciproquement, les couples $(u_0 + kb, v_0 - ka), k \in \mathbb{Z}$ *sont bien solutions.*

Références