# Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

20 avril 2024

***Exercice 0.1*** ★ ***Pas de titre***

*Considérons deux entiers $(a, b) \in (\mathbb{Z}^*)^2$ premiers entre eux $a \wedge b = 1$ et un couple de Bézout $(u_0, v_0) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au_0 + bv_0 = 1$. Déterminer l'ensemble de tous les couples de Bézout $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ vérifiant $au + bv = 1$.*

***Solution :*** *Soit $(u, v)$ un couple d'entiers vérifiant la relation $au + bv = 1$. Par soustraction on a $a(u - u_0) = b(v_0 - v)$. Donc $b$ divise $a(u - u_0)$. Puisque $a$ et $b$ sont premiers entre eux, d'après le lemme de Gauss, $b$ divise nécessairement $u - u_0$, donc il existe $k \in \mathbb{Z}, u - u_0 = kb$ ou $u = u_0 + kb$. En remplaçant $u - u_0$ par $kb$, on obtient alors $akb = b(v_0 - v)$, d'où $v = v_0 - ka$.*
*Réciproquement, les couples $(u_0 + kb, v_0 - ka), k \in \mathbb{Z}$ sont bien solutions.*

## Références