Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

22 février 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient deux entiers non nuls $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. On note $\delta = a \wedge b$ leur pgcd et $\mu = a \vee b$ leur ppcm. Montrez que

$$(a + b) \wedge \mu = \delta.$$

Solution : *On sait qu'il existe $(a', b') \in (\mathbb{Z}^*)^2$ tels que $a = \delta a'$, $b = \delta b'$ et $a' \wedge b' = 1$. On a de plus $\delta\mu = ab$ donc $\mu = \delta a'b'$. Par conséquent,*

$$(a + b) \wedge \mu = \big(\delta(a' + b')\big) \wedge (\delta a'b') = \delta \times \big((a' + b') \wedge a'b'.$$

Mais puisque a' et b' sont premiers entre eux, on a également $a' \wedge (a' + b') = 1$ et $b' \wedge (a' + b') = 1$ (il suffit d'écrire une relation de Bézout). Donc puisque $a' \wedge b' = 1$, $a'b' \wedge (a' + b') = 1$. Finalement, $(a + b) \wedge \mu = \delta$.

Références