Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient deux entiers non nuls $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. *On suppose que* $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q}$. *Montrez qu'alors* $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{N}^*$.

Solution : *Comme* $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{Q}$, *il existe deux entiers* $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ *tels que* $\sqrt[n]{m} = p/q$ *avec* $p \wedge q = 1$. *Alors,* $p^n = mq^n$. *Mais puisque* p *et* q *sont premiers entre eux, on sait que* p^n *et* q^n *sont également premiers entre eux. Puisque* $p^n | mq^n$ *avec* $p^n \wedge q^n = 1$, *d'après le théorème de Gauss, il vient que* p^n *divise* m. *Donc il existe* $k \in \mathbb{N}^*$ *tel que* $m = kp^n$. *Mais alors on a* $k = \dfrac{1}{q^n}$ *et donc* $q^n = 1$. *Par conséquent,* $m = p^n$ *et donc* $\sqrt[n]{m} = p$.

Références