Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

20 avril 2024

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***

Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z}, +)$. On définit l'ensemble

$$H_1 + H_2 = \{h_1 + h_2 \mid (h_1, h_2) \in H_1 \times H_2\}$$

1. *Montrer que $H_1 + H_2$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ qui contient la partie $H_1 \cup H_2$;*
2. *Déterminer le sous-groupe $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}$;*
3. *Comment interpréter l'inclusion $a\mathbb{Z} \cup b\mathbb{Z} \subset c\mathbb{Z}$ en termes de divisibilité ?*

Solution :

1. *On vérifie facilement que $H_1 + H_2$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$. Il contient de plus clairement H_1 et H_2 et donc $H_1 \cup H_2$. Montrons que c'est le plus petit sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ à vérifier cette propriété. Soit H' un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$ qui contient $H_1 \cup H_2$. Alors H' doit contenir toutes les sommes $h_1 + h_2$ avec $h_1 \in H_1$ et $h_2 \in H_2$. Donc $H \subset H'$.*
2. *Déterminons le sous-groupe $H = 4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}$. Ces élements sont de la forme $4a + 6b$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$. Comme $4 \wedge 6 = 2$, d'après le théorème de Bézout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $4u + 6v = 2$ donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $4uk + 6vk = 2k$ et H contient tous les entiers pairs. Réciproquement, tout élément de H est pair donc $\boxed{4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z}}$.*
3. *En suivant le même raisonnement que précédemment, on pourrait montrer que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = (a \wedge b)\,\mathbb{Z}$ donc $a\mathbb{Z} \cup b\mathbb{Z} \subset c\mathbb{Z}$ si et seulement si $c \mid a \wedge b$.*

Références