Une équation diophantienne

Emmanuel Vieillard-Baron[1], Alain Soyeur[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[3], ,

13 mai 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Une équation diophantienne***

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ *l'équation* $1665x + 1035y = 45$.

Solution : *Comme* $1665 \wedge 1035 = 45$ *cette équation est équivalente à* $37x + 23y = 1$. *Comme* 37 *et* 23 *sont premiers entre eux cette équation admet des solutions par le théorème de Bézout. Une d'entre elles est par exemple donnée par* $x = 5$ *et* $y = -8$. *Les autres s'en déduisent, elles sont de la forme* $(5 - 23k, -8 + 37k)$. *En effet, elles sont de la forme* $(5 + a, -8 + b)$ *avec* $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$. *On injecte dans* $37x + 23y = 1$ *et il vient que* $37a + 23b = 0$. *Comme* 23 *et* 37 *sont premiers, on en déduit que* $23 \mid a$ *et* $37 \mid b$. *Donc il existe* $k, k' \in \mathbb{Z}$ *tels que* $a = 23k$ *et* $b = 37k'$. *On injecte dans l'égalité* $37a + 23b = 0$ *et on trouve que* $k = -k'$ *d'où la forme des solutions. Réciproquement, toute couple de cette forme est solution de l'équation.*

Références