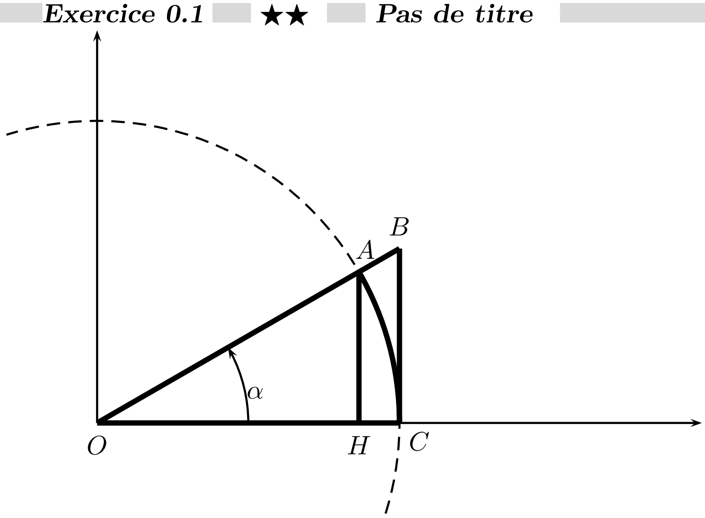
Pas de titre

François Capaces[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and Alain Soyeur[3]

[1], ,
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★★ ***Pas de titre***



On a tracé le cercle le cercle trigonométrique dans un repère orthonormé direct. L'angle α est mesuré en radians. Les triangles OAH et OBC sont rectangles respectivement en H et C. On rappelle que l'aire du secteur angulaire OAC est $\alpha/2$.

1. *Calculer l'aire du triangle OAC. En déduire que :* $\forall\alpha \in \left]0, \pi/2\right], \quad 0 < \sin\alpha < \alpha$.
2. *Montrer que pour $\alpha \in]0, \pi/2]$, on a* $1 > \cos^2\alpha > 1 - \alpha^2$. *En déduire que* $\lim_{\alpha\to 0} \cos\alpha = 1$.
3. *Calculer l'aire du triangle OBC. En déduire les inégalités :* $\forall\alpha \in \left]0, \pi/2\right], \quad \sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$.
4. *Déduire des questions précédentes que* $\lim_{\alpha\to 0} \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$ *et que* $\lim_{\alpha\to 0} \dfrac{\tan\alpha}{\alpha} = 1$. *On prouve ainsi que* sin *et* tan *sont dérivables en* 0. *Expliquer pourquoi.*
5. *Pour $\alpha \in [0, \pi/2]$, Établir les inégalités :*

$$0 \leqslant \cos^2\alpha \leqslant \cos\alpha, \quad 0 \leqslant 1 - \cos\alpha \leqslant \sin^2\alpha \quad \text{et} \quad 0 \leqslant 1 - \cos\alpha \leqslant \alpha^2.$$

6. *En déduire* $\lim_{\alpha\to 0} \dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha}$.
7. *En déduire* $\lim_{h\to 0} \dfrac{\cos(\alpha+h)-\cos\alpha}{h}$ *et* $\lim_{h\to 0} \dfrac{\sin(\alpha+h)-\cos\alpha}{h}$. *Quelle propriété importante de* cos *et* sin *vient-on de prouver ?*

Solution :

1. *L'aire du triangle* OAH *est donnée par* $\frac{OC\times AH}{2} = \frac{\sin\alpha}{2}$. *Si* $\alpha \in \left]0,\pi/2\right]$ *alors le triangle* OAH *n'est pas plat et son aire est* >0 *donc* $\sin\alpha > 0$. *Par ailleurs, le triangle* OAH *est inclus dans le secteur angulaire* OAC *et donc* $\frac{\sin\alpha}{2} < \frac{\alpha}{2}$ *ce qui prouve la seconde inégalité.*
2. *Soit* $\alpha \in \left]0,\pi/2\right]$. *On utilise la question précédente. De* $0<\sin\alpha<\alpha$, *on tire* $0<\sin^2\alpha<\alpha^2$ *car la fonction* $x\mapsto x^2$ *est croissante sur* $\mathbb{R}_+$. *Donc* $1 > 1-\sin^2\alpha > 1-\alpha^2$ *ce qui donne finalement* $1 \geqslant \cos^2\alpha > 1-\alpha^2$. *Si* $\alpha \to 1$, *on en déduit grâce au théorème des gendarmes que* $\lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha = 1$.
3. *L'aire du triangle* OBC *est* $\frac{OC\times BC}{2} = \frac{\tan\alpha}{2}$. *Comme le triangle* AHC *est strictement inclus dans le secteur* OAC *et que ce secteur est strictement inclus dans le triangle* OBC, *on en déduit que* $\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$.
4. *Soit* $\alpha \in \left]0,\pi/2\right]$. *On déduit de l'inégalité de la question* 1. *que* $0 < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$. *De même, de* $\tan\alpha > \alpha$, *on tire* $\sin\alpha > \alpha\cos\alpha$ *et donc* $\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} > \cos\alpha \xrightarrow[\alpha\to 0^+]{} 1$. *Par le théorème des gendarmes, on en déduit que* $\lim_{\alpha\to 0^+}\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$. *En* 0^-, *on trouve la même limite par parité. La seconde limite est alors évidente. On reconnaît que* $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ *est le taux d'accroissement de* sin *en* 0. *Il admet alors une limite quand* $\alpha\to 0$ *et* sin *est dérivable en* 0 *de dérivée égale à* 1. *Idem pour* tan.
5. *On sait que* $0 \leqslant \cos\alpha \leqslant 1$ *donc en multipliant par* $\cos\alpha$ *qui est positif, on obtient la première inégalité. On en déduit que* $1 \geqslant 1-\cos^2\alpha \geqslant 1-\cos\alpha$ *et donc la seconde inégalité. La dernière en découle en utilisant que* $\sin\alpha < \alpha$.
6. *On divise la dernière inégalité par* $\alpha \in \left]0,\pi/2\right]$ *:*
$$0 \leqslant \frac{1-\cos\alpha}{\alpha} \leqslant \frac{\alpha^2}{\alpha} = \alpha \xrightarrow[\alpha\to 0^+]{} 0$$
donc $\lim_{\alpha\to 0^+}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha} = 0$. *Par parité, il s'ensuit que* $\lim_{\alpha\to 0}\frac{1-\cos\alpha}{\alpha} = 0$.
7. *Grâce aux formules d'addition et aux questions précédentes :*
$$\frac{\cos(\alpha+h)-\cos\alpha}{h} = \cos\alpha\frac{\cos h - 1}{h} - \sin\alpha\frac{\sin h}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} -\sin\alpha$$
On reconnaît dans la premier terme de la ligne précédente le taux d'accroissement de cos *en* α. *On a prouvé qu'il tend vers* $\sin\alpha$ *quand* $h\to 0$. *Donc* cos *est dérivable en* α *de dérivée* $-\sin\alpha$. *On procède de même pour* sin.

Références