Pas de titre

Alain Soyeur[1], Emmanuel Vieillard-Baron[2], and François Capaces[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg
[3], ,

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★ ***Pas de titre***

Démontrer que $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 + \dfrac{\tan x}{x} > 2$.

Solution : *Soit* $\Phi(x) = \cos x \sin^2 x + x \sin x - 2x^2 \cos x$, *on a*

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) &= -\sin^3 x + 2\cos^2 x \sin x + \sin x + x\cos x - 4x\cos x + 2x^2 \sin x \\
&= 2\cos^2 x \sin x - \sin^3 x + \sin x + 3x\cos x + 2x^2 \sin x. \\
\Phi''(x) &= 2\cos^3 x - 4\sin x \cos x \sin x - 3\sin^2 x \cos x + \cos x - 3\cos x + 3x\sin x + 4x\sin x + 2x^2 \cos x \\
&= 2\cos^3 x - 7\sin^2 x \cos x - 2\cos x + 7x\sin x + 2x^2 \cos x \\
&= 2\cos x(\cos^2 x - 1) + 2x^2 \cos x + 7\sin x(x - \sin x \cos x) \\
&= 2\cos x(\cos^2 x - (1 - x^2)) + 7x\sin x\left(1 - \frac{\sin 2x}{2x}\right)
\end{aligned}$$

Or sur $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $1 - \dfrac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1$, *d'oú* $\left(1 - \dfrac{x^2}{2}\right)^2 \leqslant \cos^2 x$, *soit* $1 - x^2 + \dfrac{x^4}{4} \leqslant \cos^2 x$, *soit* $0 \leqslant \dfrac{x^4}{4} \leqslant \cos^2 x - (1 - x^2)$.

On a donc $\Phi''(x) > 0$. Φ' *est strictement croissante sur* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, *comme* $\Phi'(0) = 0$, Φ' *est à valeurs positives, donc* Φ *est strictement croissante sur* $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$, *comme* $\Phi(0) = 0$, Φ *est à valeurs positives.*
Donc $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x \sin^2 x + x\sin x > 2x^2 \cos x$, *d'oú le résultat en divisant par* $x^2 \cos x$.

Références