Pas de titre

Emmanuel Vieillard-Baron¹, Alain Soyeur², and François Capaces³

¹Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

²Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse

³, ,

22 février 2024

Exercice 0.1 Pas de titre

Soit un entier $n \geq 2$. Calculez la somme de tous les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$S = \sum_{x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} x$$

Solution : Notons S la somme recherchée. On sait que $0 + 1 + \dots + (n - 1) = \frac{n(n - 1)}{2}$,

Étudions deux cas selon la parité de n :

1. si l'entier n est impair, $(n - 1)$ est pair et par conséquent, $S = \widehat{n} \times \widehat{(n - 1)}/2 = 0$;
2. si l'entier n est pair, il s'écrit $n = 2p$, et donc $S = \widehat{p} \times \widehat{(n - 1)} = -\widehat{p} = \widehat{n - p} = \widehat{p}$.

En conclusion,

$$S = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ impair} \\ \frac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \end{cases}$$

Références