$\forall\, F$ fermé dans $\mathbb{R}$, $\exists\, f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})\ :\ F = f^{-1}(0)$. (part. 3)

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ $\forall\, F$ ***fermé dans*** $\mathbb{R}$, $\exists\, f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})\ :\ F = f^{-1}(0)$***. (part. 3)***

Le but de cet exercice est la construction d'une fonction infiniment dérivable non identiquement nulle et nulle en dehors d'une intervalle fermé.

Étant donné $f\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on appelle support de f le plus petit fermé de $\mathbb{R}$ tel que f soit nulle sur son complémentaire. Si le support est borné, on dit que f est à support compact. Soit α un réel strictement positif, on définit la fonction H_α sur $\mathbb{R}$ par

$$H_\alpha(x) = \begin{cases} 1/\alpha, & \text{si } \ x \in]0,\alpha[, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $(a_n)_n$ une suite décroissante de réels strictement positifs telle que la série $\sum_n a_n$ converge, on note a sa somme. Pour $m \in \mathbb{N}$ on désigne par $\mathscr{C}^m_{0,a}$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^m$ sur $\mathbb{R}$ à support inclu dans $[0,a]$.

1) Soient f et g deux fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ou possédant un nombre fini de discontinuités et à support compact. On définit la fonction $f * g$ pour $x \in \mathbb{R}$ pa r

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t)dt.$$

Montrer que $f * g$ est une fonction à support compact et plus précidément si pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^\star$, f (resp. g) est à support compact dans $[0,\alpha]$ (resp. $[0,\beta]$), alors $f * g$ est à support compact dans $[0,\alpha+\beta]$. Donner également une expression simple de

$$\int_{\mathbb{R}} (f * g)(x)dx.$$

2) On définit la fonction u_1 par

$$u_1 = H_{a_0} * H_{a_1}.$$

Déterminer explicitement u_1 et en déduire m_1 le plus grand entier tel que u_1 appartienne à $\mathscr{C}^m_{0,a}$.

3) On définit maintenant la fonction u_k par

$$u_k = u_{k-1} * H_{a_k}.$$

Déterminer m_k le plus grand entier tel que u_k appartienne à $\mathscr{C}^m_{0,a}$.

4) Montrer que pour $k \geq 2$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a pour tout $j \leq m_k$,

$$|u_k^{(j)}(x)| \leq \frac{2^j}{a_0 \dots a_j}.$$

5) Montrer que pour tout couple d'entiers k, m supérieurs ou égaux à 2, et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$|u_{k+m}(x) - u_m(x)| \leq 2 \cdot \frac{a_{m+1} + \dots + a_{m+k}}{a_0 a_1}.$$

6) Montrer que, quand k tends vers $+\infty$, la suite $(u_k)_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction u appartenant à $\mathscr{C}^\infty_{0,a}$. Montrer également que

$$\int_{\mathbb{R}} u(x)dx = 1.$$

Solution :

Références