$\text{dist}(a, \ker(T))$ où T est une forme linéaire continue.

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 juillet 2024

Exercice 0.1 ★ ***dist**$(a, \ker(T))$ **où** T **est une forme linéaire continue.***

Soient E un espace vectoriel normé, $T \in E'$ une forme linéaire continue non identiquement nulle sur E.

1. *Montrer que pour tout $a \in E \setminus \ker(T)$, $|||\, T \,||| = \dfrac{|T(a)|}{dist(a, \ker(T))}$.*
2. *Dans l'espace de Banach $c_0(\mathbb{N})$ des suites réelles convergentes vers 0 (muni de la norme « sup ») on considère*

Solution :

1. *Pour $u \in \ker(T)$ on a*
$$|T(a)| = |T(a-u)| \leq |||\, T \,||| \cdot \|a-u\|,$$
par conséquent, en passant à la borne inférieure pour $u \in \ker(T)$:
$$\|T(a)\| \leq |||\, T \,||| \cdot dist(a, \ker(T)),$$
soit
$$|||\, T \,||| \leq \frac{|T(a)|}{dist(a, \ker(T))}$$
Pour obtenir l'inégalité inverse, avec la définiton de $|||\, T \,|||$, il suffit de montrer que pour tout $x \in E$:
$$|T(x)| \leq \frac{|T(a)|}{dist(a, \ker(T))} \cdot \|x\|.$$
Si $T(x) = 0$ il n'y a rien à démontrer, on peut donc supposer $T(x) \neq 0$ et l'inégalité étant homogène en x on peut, quitte à remplacer x par $\frac{T(a)}{T(x)}x$ supposer que $T(x) = T(a)$. Alors $x - a \in \ker(T)$ qui implique $dist(x, \ker(T)) = dist(a, \ker(T))$ (l'écrire) et finalement comme $\|x\| \geq dist(x, \ker(T))$:
$$|T(x)| \leq |T(x)| \cdot \frac{\|x\|}{dist(x, \ker(T))} = |T(a)| \cdot \frac{\|x\|}{dist(a, \ker(T))}$$
CQFD.

Références