$\forall\, F$ fermé dans $\mathbb{R}$, $\exists\, f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})\ :\ F = f^{-1}(0)$.

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

23 mars 2024

Exercice 0.1 ★ $\forall\, F$ ***fermé dans*** $\mathbb{R}$**,** $\exists\, f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})\ :\ F = f^{-1}(0)$**.**

Soit F un fermé de $\mathbb{R}$, construire une fonction $f \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+^\star)$ telle que $F = f^{-1}(0)$. Commencer par traiter le cas où $\Omega = \mathbb{R} \setminus F$ est un intervalle.

Solution : *-Lorsque $\Omega =]a, b[,\ a, b \in \mathbb{R}$ on peut choisir*

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-(x-a)^{-2}(x-b)^{-2}\right), & x \in]a, b[\\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

et si Ω est non borné, par exemple $\Omega =]a, +\infty[$

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-(x-a)^{-2}\right), & x \in]a, +\infty[\\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ces fonctions sont classiquement $\mathscr{C}^\infty$ et vérifient les propriétés recquises. Il est important pour la suite de bien observer que les dérivées à tout ordre de ces fonctions sont bornées sur $\mathbb{R}$.

-Pour un fermé arbitraire F de $\mathbb{R}$, $\Omega = \mathbb{R} \setminus F$ est réunion au plus dénombrable[1] d'intervalles deux à deux disjoints

$$\Omega = \bigcup_n]a_n, b_n[.$$

Si l'on désigne par f_n la fonction associée à $]a_n, b_n[$ dans la première étape, posons pour tout entier n

$$M_n = \max_{0 \leq k \leq n} \sup\left\{ |f_n^{(k)}(x)|,\ x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Alors le théorème de Weierstrass de dérivation des séries de fonctions assure que la formule

$$f = \sum_{n \geq 1} \frac{f_n}{n^2 M_n}$$

définit une fonction $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ qui possède les propriétés désirées.

Remarque : *Avec le même esprit, on peut étendre ce résultat à $\mathbb{R}^d$:*

1) Soit $B \subset \mathbb{R}^d$. Montrer qui existe $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ positive telle que $f^{-1}(0) = \mathbb{R}^d \setminus B$.

2) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $(g_n)_n$ une suite dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, montrer qu'il existe une suite $(\mu_n)_n$ de réels strictement positifs telle que la série $\sum_n \mu_n g_n$ converge dans $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

3) Soit $E \subset \Omega$ un fermé de $\mathbb{R}^d$. En observant que $\Omega \setminus E$ est réunion dénombrable de boules ouvertes, montrer qu'il existe $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ positive, telles que $E = f^{(-1)}(0)$.

4) Si E et F sont deux fermés disjoints dans Ω, montrer qu'il existe $f \in \mathscr{C}^\infty(\Omega)$ telle que $0 \leq f \leq 1,\ E = f^{(-1)}(0),\ F = f^{-1}(1)$.

Références