Irrationalité de $\sqrt{2}$

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

Exercice 0.1 ★ ***Irrationalité de $\sqrt{2}$***

[1]
Donner plusieurs démonstrations de l'irrationalité de $\sqrt{2}$.

Solution : *-Supposons qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^\star$ tels que $\sqrt{2} = p/q$, et soit q le plus petit de ces tels dénominateurs. Alors $2q^2 = p^2$, p^2 et par conséquent p est pair : $p = 2p_1$. De là, $2q^2 = 4p_1^2$ soit $q^2 = 2p_1^2$ et q est donc aussi pair. Si $q = 2q_1$ on aura $\sqrt{2} = p/q = p_1/q_1$ et $q_1 < q$ ce qui contredit le choix de q.*

-Supposons à nouveau qu'il existe $p, q \in \mathbb{N}^\star$ tels que $\sqrt{2} = p/q$, et soit q le plus petit de ces tels dénominateurs. Alors

$$\frac{2q-p}{p-q} = \frac{2-(p/q)}{(p/q)-1} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2},$$

comme $2p - q$ et $p - q$ sont des entiers et $0 < p - q < q$ on a à nouveau une contradiction.

-Cette démonstration utilise le théorème[1] fondamental de l'arithmétique (tout entier $n > 1$ se décompose de manière unique (à l'ordre des facteurs prés) en un produit de nombres premiers). Si $\sqrt{2} = p/q$, alors $2q^2 = p^2$. Via le théorème fondamental de l'arithmétique, dans la décomposition de p^2 en facteurs premiers tout nombre premier (et 2 en particulier) doit apparaitre élevé à une puissance paire. D'un autre coté, et pour les mêmes raisons, l'exposant de 2 dans la décomposition de $2q^2$ en facteurs premiers sera impair. L'unicité de la décomposition fourni alors la contradiction.

-Posons $\varepsilon_i = (\sqrt{2}-1)^i$. On a $0 < \varepsilon_i < 2^{-i}$ pour tout entier i et il est aussi facile de vérifier (par récurrence sur i ou avec le binôme de Newton) que l'on peut écrire $\varepsilon_i = a_i + b_i\sqrt{2}$ avec $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$. Si $\sqrt{2} = p/q$, alors

$$\varepsilon_i = a_i + b_i \cdot \frac{p}{q} = \frac{qa_i + pb_i}{q} = \frac{A_i}{q}$$

où A_i est un entier. Mais $\varepsilon_i > 0$ pour tout i implique $A_i \geq 1$ pour tout i et par suite $\varepsilon_i \geq 1/q$ pour tout entier i ce qui est absurde car $2^{-i} \geq \varepsilon_i > 0 \Rightarrow \lim_i \varepsilon_i = 0$ (ou bien en remarquant que $2^{-i} \geq \varepsilon_i \geq 1/q$, $\forall\, i$ est incompatible avec l'inégalité classique $2^i > 2^q > q$, $\forall\, i > q$...).

-L'irrationalité de $\sqrt{2}$ est un cas particulier du résultat suivant : « Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $\sqrt{n}$ est soit entier, soit irrationel » *. Pour établir ce dernier point, on peut par exemple reprendre la seconde preuve : posons $k := [\sqrt{n}]$ (partie entière) si $\sqrt{n}$ n'est pas un entier, supposons le rationel i.e. $\sqrt{n} = p/q$ où q est le plus petit de ces tels dénominateurs. Alors comme plus haut*

$$\frac{nq - kp}{p - kq} = \frac{n - k\dfrac{p}{q}}{\dfrac{p}{q} - k} = \frac{n - k\sqrt{n}}{\sqrt{n} - k} = \sqrt{n}$$

avec $0 < p - kq < q$ (car $\sqrt{n} \notin \mathbb{N}$ implique $\sqrt{n} - 1 = \frac{p}{q} - 1 < k < \frac{p}{q} = \sqrt{n}$...) ce qui est contraire au choix de q, ainsi $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}$.

On pourrai aussi raisonner comme dans la quatrième preuve de l'irrationalité de $\sqrt{2}$: soit $k := [\sqrt{n}]$ alors $\varepsilon_i := (\sqrt{n} - k)^i$ est de la forme $a_i + b_i\sqrt{n}$ avec $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$. Si $\sqrt{n}$ n'est pas un entier alors $\lim_i \varepsilon_i = 0$ ce qui donne la contradiction comme pour $\sqrt{2}$. La troisième preuve marche aussi mais la première ne subsiste que pour n pair non multiple de 4.

Références

[1] M.Laczkovoch. Conjecture and Proof. Classroom Ressource Material. M.A.A., 2007.