Générer des permutation avec des urnes

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

22 février 2024

Exercice 0.1 ★ ***Générer des permutation avec des urnes***

Dans une urne on met une boule numérotée 1*, deux boules numérotées* 2 *et ainsi de suite jusqu'à* n *boules numérotées* n*. On tire une à une les boules avec remise jusqu'a obtention des* n *chiffres* $1, 2, \cdots, n$*. À un tel tirage on associe la permutation de* $\{1, 2, \ldots, n\}$ *que l'on botient si on supprime les boules associées à un numéro deja sorti (par exemple si* $n = 4$ *le tirage* 4434342241 *donne la permutation* 4321*). Soit* X_n *la variable aléatoire « position de* n *dans la permutation obtenue » . Montrer que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(X_n)}{n} = 1 - \log(2).$$

Solution : *Soit* Y_i $(1 \leq i \leq n-1)$ *la variable aléatoire définie par*

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si une balle marquée } i \text{ est choisie avant une marquée } n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$X_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} Y_i,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} E(X_n) &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} E(Y_i) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} P(Y_i = 1) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n+i}, \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} \frac{E(X_n)}{n} &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n+i} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{i/n}{1+i/n} - \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre n vers l'infini et reconnaitre dans le second terme une somme de Riemann :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(X_n)}{n} = \int_0^1 \frac{x}{1+x} dx = 1 - \log(2).$$

Références