Générer des permutation avec des urnes

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

18 avril 2024

Exercice 0.1 ★ ***Générer des permutation avec des urnes***

Dans une urne on met une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2 et ainsi de suite jusqu'à n boules numérotées n. On tire une à une les boules avec remise jusqu'a obtention des n chiffres $1, 2, \cdots, n$. À un tel tirage on associe la permutation de $\{1, 2, \dots, n\}$ que l'on botient si on supprime les boules associées à un numéro deja sorti (par exemple si $n = 4$ le tirage 4434342241 donne la permutation 4321). Soit X_n la variable aléatoire « position de n dans la permutation obtenue » . Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(X_n)}{n} = 1 - \log(2).$$

Solution : *Soit Y_i ($1 \leq i \leq n-1$) la variable aléatoire définie par*

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si une balle marquée } i \text{ est choisie avant une marquée } n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a

$$X_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} Y_i,$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} E(X_n) &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} E(Y_i) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} P(Y_i = 1) \\ &= 1 + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n+i}, \end{aligned}$$

ainsi

$$\begin{aligned} \frac{E(X_n)}{n} &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n+i} \\ &= \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{i/n}{1+i/n} - \frac{1}{2n}. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à faire tendre n vers l'infini et reconnaitre dans le second terme une somme de Riemann :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{E(X_n)}{n} = \int_0^1 \frac{x}{1+x}dx = 1 - \log(2).$$

Références