

L'inégalité Arithmético-Géométrique version améliorée via Taylor-Lagrange

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ L'inégalité Arithmético-Géométrique version améliorée via Taylor-Lagrange

Pour $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$ on note

$$\bar{x}_a = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \bar{x}_g = (x_1 \dots x_n)^{1/n}, M = \max_{1 \leq i \leq n} x_i, m = \min_{1 \leq i \leq n} x_i, \sigma^2 = n^{-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction \log et $\bar{x}, x_i \in [m, M]$ pour en déduire

$$\exp(\sigma^2/2M^2) \leq \frac{\bar{x}_a}{\bar{x}_g} \leq \exp(\sigma^2/2m^2).$$

Préciser le cas d'égalité.

Solution : Appliquons¹ donc à la fonction $x \mapsto \log(x)$ la formule de Taylor-Lagrange en les points² $\bar{x}_a, x_i \in [m, M]$, ($1 \leq i \leq n$) :

$$\log(x_i) = \log(\bar{x}_a) + \frac{x_i - \bar{x}_a}{\bar{x}_a} - \frac{(x_i - \bar{x}_a)^2}{2[\bar{x}_a + \theta_i(x_i - \bar{x}_a)]^2},$$

sommons pour $1 \leq i \leq n$ ces égalités

$$\log(x_1 \dots x_n) = n \log(\bar{x}_a) + \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x}_a)^2}{2[\bar{x}_a + \theta_i(x_i - \bar{x}_a)]^2}$$

que l'on peut encore écrire

$$\log\left(\frac{\bar{x}_a}{\bar{x}_g}\right) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x}_a)^2}{[\bar{x}_a + \theta_i(x_i - \bar{x}_a)]^2}.$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que $m \leq \bar{x}_a + \theta_i(x_i - \bar{x}_a) \leq M$, ($1 \leq i \leq n$) donne

$$\frac{\sigma^2}{2M} \leq \log\left(\frac{\bar{x}_a}{\bar{x}_g}\right) \leq \frac{\sigma^2}{2m}$$

où encore

$$\exp(\sigma^2/2M^2) \leq \frac{\overline{x_a}}{\overline{x_g}} \leq \exp(\sigma^2/2m^2).(\star)$$

Comme $1 \leq \exp(\sigma^2/2M^2)$ on retrouve la forme classique de l'inégalité inégalité Arithmético-Géométrique : $\overline{x_g} \leq \overline{x_a}$; en outre (\star) assure que $\overline{x_g} = \overline{x_a}$ si et seulement si $\sigma = 0$ i.e. si et seulement si $x_1 = \dots = x_n$.

Références