L'inégalité Arithmético-Géométrique version améliorée via Taylor-Lagrange

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

1er février 2023

Exercice 0.1 ★ ***L'inégalité Arithmético-Géométrique version améliorée via Taylor-Lagrange***

Pour $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}_+$ on note

$$\overline{x_a} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},\ \overline{x_g} = (x_1 \dots x_n)^{1/n},\ M = \max_{1\leq i\leq n} x_i,\ m = \min_{1\leq i\leq n} x_i,\ \sigma^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction log *et* $\overline{x}, x_i \in [m, M]$ *pour en déduire*

$$\exp(\sigma^2/2M^2) \leq \frac{\overline{x_a}}{\overline{x_g}} \leq \exp(\sigma^2/2m^2).$$

Préciser le cas d'égalité.

Solution : *Appliquons*[1] *donc à la fonction* $x \mapsto \log(x)$ *la formule de Taylor-Lagrange en les points*[2] $\overline{x_a}, x_i \in [m, M],\ (1 \leq i \leq n)$ *:*

$$\log(x_i) = \log(\overline{x_a}) + \frac{x_i - \overline{x_a}}{\overline{x_a}} - \frac{(x_i - \overline{x_a})^2}{2\left[\overline{x_a} + \theta_i(x_i - \overline{x_a})\right]^2},$$

sommons pour $1 \leq i \leq n$ *ces égalités*

$$\log(x_1 \dots x_n) = n\log(\overline{x_a}) + \sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - \overline{x_a})^2}{2\left[\overline{x_a} + \theta_i(x_i - \overline{x_a})\right]^2}$$

que l'on peut encore écrire

$$\log\left(\frac{\overline{x_a}}{\overline{x_g}}\right) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\frac{(x_i - \overline{x_a})^2}{\left[\overline{x_a} + \theta_i(x_i - \overline{x_a})\right]^2}.$$

Il ne reste plus qu'à remarquer que $m \leq \overline{x_a} + \theta_i(x_i - \overline{x_a}) \leq M,\ (1 \leq i \leq n)$ *donne*

$$\frac{\sigma^2}{2M} \leq \log\left(\frac{\overline{x_a}}{\overline{x_g}}\right) \leq \frac{\sigma^2}{2m}$$

où encore

$$\exp(\sigma^2/2M^2) \leq \frac{\overline{x_a}}{\overline{x_g}} \leq \exp(\sigma^2/2m^2).(\star)$$

Comme $1 \leq \exp(\sigma^2/2M)$ *on retrouve la forme classique de l'inégalité inégalité Arithmético-Géométrique :* $\overline{x_g} \leq \overline{x_a}$ *; en outre* $(\star)$ *assure que* $\overline{x_g} = \overline{x_a}$ *si et seulement si* $\sigma = 0$ *i.e. si et seulement si* $x_1 = \cdots = x_n$.

Références