L'inégalité Arithmético-Géométrique version améliorée via Taylor-Lagrange

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

1er février 2023

Exercice 0.1 ★ ***L'inégalité Arithmético-Géométrique version améliorée via Taylor-Lagrange***

Pour $x_1, x_2, \dots x_n \in \mathbb{R}_+$ *on note*

$$\overline{x_a} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n},\ \overline{x_g} = (x_1 \dots x_n)^{1/n},\ M = \max_{1\leq i\leq n} x_i,\ m = \min_{1\leq i\leq n} x_i,\ \sigma^2 = n^{-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2.$$

Appliquer la formule de Taylor-Lagrange à la fonction $\log$ *et* $\overline{x}, x_i \in [m, M]$ *pour en déduire*

$$\exp(\sigma^2/2M^2) \leq \frac{\overline{x_a}}{\overline{x_g}} \leq \exp(\sigma^2/2m^2).$$

Préciser le cas d'égalité.

Références