Une fonction continue nulle part dérivable

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

30 janvier 2023

Exercice 0.1 ★ ***Une fonction continue nulle part dérivable***

[1], [2].

1. *(Préliminaire) Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f\ :\ I \to \mathbb{R}$ une application dérivable un point $a \in I$ montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\left| \frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} - \frac{f(u_1) - f(u_2)}{u_1 - u_2} \right| < \varepsilon$$

pour tous $t_1 < a < t_2,\ u_1 < a < u_2$ dans $]a - \delta, a + \delta[$.

2. *Soit $G\ :\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $G(x) = dist(x, \mathbb{Z})$; pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $G_(x) = dist(2^n x, \mathbb{Z})$ puis $H(x) = \sum_{n\geq 0} 2^{-n} G_n(x)$.*

   -Montrer que $H \in \mathscr{C}^0(\mathbb{R})$ et que la réunion des points de non dérivabilité des fonctions G_n est dense dans $\mathbb{R}$.

   Soient $a \in \mathbb{R},\ \delta > 0$.

   -Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N},\ r \in \mathbb{Z}$ tels que

$$a - \delta < x_1 = \frac{r}{2^k} < x_2 = \frac{r+1}{2^k} < a + \delta$$

et étudier la quantité

$$\frac{H(\xi) - f(x_1)}{\xi - x_1} - \frac{H(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

(où $\xi = (x_1 + x_2)/2$) pour en déduire la non dérivabilité de H au point a.

Solution :

1.
2. -

   -

Références

[1] R.P. Boas. A primer of real functions, volume 13 of The Carus Mathematical Monograph. A.M.S., 1981.

[2] B. Hauchecorne. Les Contre-exemples en Mathématiques. Ellipses, seconde édition 2007.