Pas de titre

Alain Soyeur[1], Bernhard Keller[2], and Emmanuel Vieillard-Baron[3]

[1]Enseignant en CPGE, Lycée Pierre de Fermat, Toulouse
[2]Professeur, Université Paris Diderot, Paris
[3]Enseignant en CPGE, Lycée Kléber, Strasbourg

22 septembre 2021

Exercice 0.1 ★★ **Pas de titre**

Étudier la fonction définie par $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

Solution :

1. *Nous déduisons du tableau de signe*

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x-1}{x+1}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

que f *est définie sur* $I =]-\infty, -1[\cup [1, +\infty[$.

2. f *est dérivable sur* $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ *car la fonction racine carrée est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$. *Soit* x *un élément de cet ensemble. On trouve :*

$$f'(x) = \frac{x^2+x-1}{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}\,(x+1)^2}.$$

f' *est donc du signe de* x^2+x-1. *Les racines de ce trinômes sont* $\alpha = \left(-1+\sqrt{5}\right)/2$ *et* $\beta = \left(-1-\sqrt{5}\right)/2$. *Seul* α *est dans le domaine de définition de* f. *Pour les limites, on remarque que :*

$$f(x) = x\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}}$$

et donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. *Par limites usuelles, il est clair que* $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) = -\infty$. *On en déduit de la tableau de variation suivant :*

x	$-\infty$		α		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$			$+\infty$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty$		0	$\nearrow$	$+\infty$

3. *Le graphe de f admet une branche infinie quand $x \to \pm\infty$ et quand $x \to -1^-$.*

— $$\frac{f(x)}{x} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}} = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 1$$

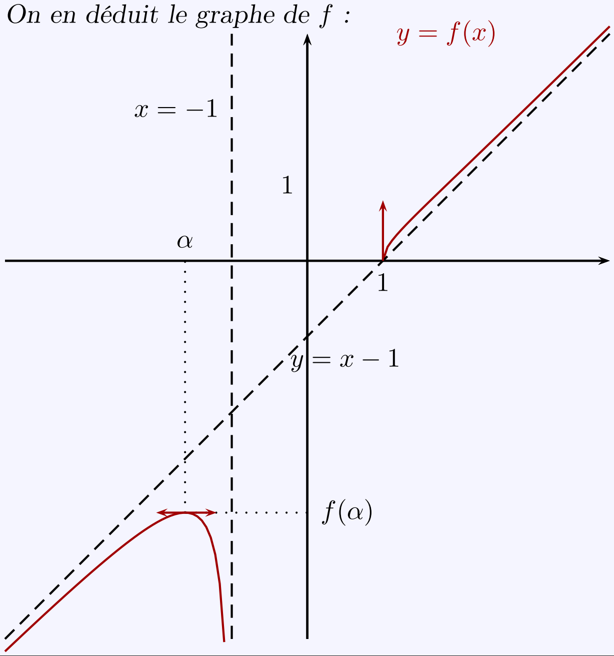
et par multiplication par les quantités conjuguées,

$$f(x) - x = x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} - 1\right) = x\frac{\frac{x-1}{x+1} - 1}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1} = \frac{\frac{-2x}{x+1}}{\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + 1} = \frac{\frac{-2}{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}} + 1} \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} -1$$

La droite d'équation $\boxed{y = x - 1}$ *est donc asymptote à la courbe au voisinage de* $+\infty$ *et* $-\infty$.

— *On a une asymptote verticale au voisinage de -1 d'équation $x = -1$.*

4. *On en déduit le graphe de f :*



Références