

Équicontinuité

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1 ★ Équicontinuité

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $f_n(x) = \sin(nx)$; étudier l'équicontinuité sur $[0, 1]$ de la suite de fonctions $(f_n)_n$.
2. Soient X un espace métrique, $(f_n)_n \subset \mathcal{C}(X)$. Démontrer que si la suite $(f_n)_n$ est équicontinue en un point $x \in X$ alors, pour toute suite $(x_n)_n$ dans X convergente vers x la suite $(f_n(x_n) - f_n(x))_n$ converge vers 0. En déduire que la suite de terme général $f_n(x) = \sin(nx)$ n'est équicontinue en aucun point $x \in \mathbb{R}$.
3. On munit l'espace $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ des fonctions continues et bornées sur $\mathbb{R}_+$ de la norme « sup » et soit dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ la suite de terme général

$$f_n(x) = \sin \sqrt{x + 4\pi^2 n^2}, \quad x \in \mathbb{R}_+, \quad n \in \mathbb{N}.$$

- Montrer que la suite $(f_n)_n$ est uniformément équicontinue sur $\mathbb{R}_+$.
- Montrer que $(f_n)_n$ est simplement convergente sur $\mathbb{R}_+$ vers $f \equiv 0$ et que $f_n(\mathbb{R})$ est relativement compact pour tout entier n .
- Supposons $(f_n)_n$ relativement compacte dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$, montrer qu'elle converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. En déduire que $(f_n)_n$ n'est pas relativement compacte dans $\mathcal{C}_b(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Solution :

Références