Preuve probabiliste du théorème d'approximation de Bernstein

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

1er février 2023

Exercice 0.1 ★ ***Preuve probabiliste du théorème d'approximation de Bernstein***

[1], [2].

Pour $f \in \mathscr{C}^0([0,1])$, B_n désigne le n-ième polynôme de Bernstein associé à f, il est défini par

$$B_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

(avec la convention $0^0 = 1$). Soit, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ et pour $x \in [0,1]$ une suite $(X_n)_n$ de variables aléatoire indépendantes suivant une même loi de Bernoulli de paramètre x. On note

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

1. *Déterminer la moyenne* $\mathrm{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right]$.
2. *Pour $\varepsilon > 0$ on pose*

$$\delta(\varepsilon) = \sup\left\{ |f(x) - f(y)| \ : \ x, y \in [0,1],\ |x-y| \leq \varepsilon \right\}.$$

Démontrer que

$$\sup_{x\in[0,1]} |\, B_n(f,x) - f(x)| \leq \delta(\varepsilon) + \frac{2\|f\|_\infty}{n\varepsilon^2}$$

et en déduire que la suite $(B_n(f,\cdot))_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers f.

Références

[1] P. Barbe and M. Ledoux. Probabilité. EDP sciences, 2007.

[2] J.Y Ouvrad. Probabilités, volume 1 et 2. Cassini, 1998.