

Le saviez vous ?

Patrice Lassère¹

¹, Université Paul Sabatier, Toulouse

6 avril 2023

Exercice 0.1 ★ **Le saviez vous ?**
[1], [2] (1974-81).

1. Montrer qu'il existe une famille non dénombrable $(N_x)_{x \in \mathbb{R}}$ de parties deux à deux distinctes de $\mathbb{N}$ qui soit totalement ordonnée pour l'inclusion.
2. Montrer qu'il existe une famille non dénombrable $(N_x)_{x \in \mathbb{R}}$ de parties deux à deux distinctes de $\mathbb{N}$ dont l'intersection de deux quelconques éléments est finie.

Solution :

1. Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$ une bijection et considérons pour tout $x \in \mathbb{R}$ les ensembles de niveau $N_x := \{n \in \mathbb{N} : f(n) < x\}$. La densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ assure que $(x \neq y) \Rightarrow (N_x \neq N_y)$: la famille est bien constituée d'éléments deux à deux distincts de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ et est non dénombrable. En outre par construction $(x \leq y) \Rightarrow (N_x \subset N_y)$: elle est donc bien totalement ordonnée pour l'inclusion.
2. Énumérons les rationnels $\mathbb{Q} = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Maintenant, pour tout réel $x \in [0, 1]$ fixons nous une suite de nombres rationnels deux à deux distincts qui converge vers x et désignons par N_x les indices de cette suite dans l'énumération précédente. Les ensembles N_x sont clairement des parties dénombrables de $\mathbb{N}$. En outre pour $x \neq y$ dans $[0, 1]$ l'ensemble $N_x \cap N_y$ est fini puisque les suites correspondantes convergent vers des limites différentes.

Références

- [1] G.L. Wize and E.B. Hall. Counterexamples in Probability and Real Analysis. Oxford University Press, 1993.
- [2] American Mathematical Monthly. M.A.A., maa@?????.fr.