

# Partie entière de $\sum_{k=1}^{10^9} k^{-2/3}$

Patrice Lassère<sup>1</sup>

<sup>1</sup>, Université Paul Sabatier, Toulouse

7 avril 2023

**Exercice 0.1** ★ **Partie entière de  $\sum_{k=1}^{10^9} k^{-2/3}$**   
[1].

Déterminer la partie entière de  $\sum_{k=1}^{10^9} k^{-2/3}$ .

**Solution :** La fonction  $t \mapsto t^{-2/3}$  est positive strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ , on a donc pour tout  $n \geq 2$

$$\int_n^{n+1} \frac{dt}{t^{2/3}} < \frac{1}{n^{2/3}} < \int_{n-1}^n \frac{dt}{t^{2/3}}.$$

Soit

$$\int_2^{10^9} \frac{dt}{t^{2/3}} < \sum_{k=2}^{10^9} \frac{1}{k^{2/3}} < \int_1^{10^9} \frac{dt}{t^{2/3}},$$

donc

$$3 \left( \sqrt[3]{10^9 + 1} - \sqrt[3]{2} \right) < \sum_{k=2}^{10^9} \frac{1}{k^{2/3}} < 3 \left( \sqrt[3]{10^9} - 1 \right) = 2997$$

et comme

$$3 \left( \sqrt[3]{10^9 + 1} - \sqrt[3]{2} \right) > 3 \left( \sqrt[3]{10^9} - \sqrt[3]{2} \right) \geq 2996$$

on en déduit (en rajoutant le terme correspondant à  $n = 1$ ) que

$$2997 < \sum_{k=1}^{10^9} \frac{1}{k^{2/3}} < 2998.$$

La partie entière vaut donc 2997.

## Références

- [1] S. Francinou, H. Gianella, and H. Nicolas. Exercices de Mathématiques (oraux X-ENS) : algèbre 1. Cassini, 2001.