Supplémentaires universels d'un espace de dimension finie

Patrice Lassère[1]

[1], Université Paul Sabatier, Toulouse

24 juin 2023

Exercice 0.1* ★ *Supplémentaires universels d'un espace de dimension finie

[1] 7-1985 & 8-1986.

Soit E un $\mathbb{K}$ espace vectoriel de dimension finie d. On dira qu'une famille $(E_i)_{i\in I}$ (I est au plus dénombrable) de sous-espaces de **même** *dimension k de E admet un supplémentaire universel F dans E si $E_i \oplus F = E$ pour tout $i \in I$.*

1. *Étudier le cas où $E = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.*
2. *Ici $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$ se traite de même) et pour tout $i \in I$, $(e_1^i, e_2^i, \dots, e_k^i)$ désignera une base de E_i enfin, si $E^{d-k} = E \times \cdots \times E$ désigne le $d-k$ produit cartésien de E avec lui-même on définit $f_i \ : \ E^{d-k} \to \mathbb{R}$ par*

$$f_i \ : \ E^{d-k} \ni (v_1, \dots, v_{d-k}) \mapsto f_i(v_1, \dots, v_{d-k}) := \det(e_1^i, e_2^i, \dots, e_k^i, v_1, \dots, v_{d-k}) \in \mathbb{R}.$$

   - *Montrer que $O_i = f_i^{-1}(\mathbb{R}^\star)$ est un ouvert dense de E^{d-k}.*
   - *Conclure.*
3.

Solution :

1. *- Par le théorème de la base incomplète O_i est non vide et c'est un ouvert (E^{n-k} est bien entendu muni de sa topologie usuelle d'espace vectoriel normé) vu l'évidente continuité des applications f_i.*

   Il reste à établir la densité. Soit $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{n-k}) \in E^{n-k}$, pour $\mathbf{v} \in \mathscr{O}_i$ l'application

$$p_i(x) = f_i(x\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \det(e_1^i, e_2^i, \dots, e_k^i, xu_1 + v_1, \dots, xu_{n_k} + v_{d-k}), \quad x \in \mathbb{R},$$

   est un polynôme en x non identiquement nul puisque $p_i(0) = f_i(\mathbf{v}) \neq 0$. Il existe donc $R > 0$ tel que $x \geq R$ implique $p_i(x) \neq 0$. Ainsi $x\mathbf{u} + \mathbf{v}$ et par suite $\mathbf{u} + x^{-1}\mathbf{v}$ (car pour $x \in \mathbb{R}^\star$ on a $p_i(x) = x^n p_i(\mathbf{u} + x^{-1}\mathbf{v})$...) est dans $\mathscr{O}_i$ pour tout $x \geq R$. Mais

$$\|\mathbf{u} - (\mathbf{u} + x^{-1}\mathbf{v})\| = x^{-1}\|\mathbf{v}\| \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Toute boule centrée en $\boldsymbol{u}$ *rencontre donc* $\mathscr{O}_i$ *qui est bien un ouvert dense de* E^{n-k}.

Pour achever la démonstration, le théorème de Baire assure que $\cap_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{O}_i$ *est une partie dense de* E^{n-k} *et pour tout* $(e_1,\ldots,e_{n-k})\in\cap_{i\in\mathbb{N}}\mathscr{O}_i$ *l'ensemble* $F := \text{vect}\{e_1,\ldots,e_{n-k}\}$ *convient.*

2.

3.

Références

[1] American Mathematical Monthly. M.A.A., maa@?????.fr.